

Интегральное исчисление.

Тема10. Неопределенный интеграл и его свойства.

§1.Первообразная и неопределенный интеграл.

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции $y = f(x)$ находилась ее производная или дифференциал.

В интегральном же исчислении решается обратная задача: по дифференциалу данной функции находится сама функция. Этот процесс называется **интегрированием**.

Определение 1. **Первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется функция $F(x)$, производная которой в каждой точке отрезка равна $f(x)$, т.е.**

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Пример.

$$f(x) = 5x^4 \Rightarrow F(x) = x^5 ; \\ F(x) = x^5 + 10 ; F(x) = x^5 - 20 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, первообразных для данной функции $f(x)$ может быть бесчисленное множество.

Теорема. Две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Доказательство: Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Докажем, что они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

По определению первообразной:

$$F_1'(x) = f(x) \text{ и } F_2'(x) = f(x)$$

Найдем производную разности первообразных:

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0 \text{ значит}$$

$$F_1(x) - F_2(x) = c \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + C,$$

ч.т.д.

Вывод: прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ все возможные постоянные значения C , можно получить все первообразные для

данной функции $f(x)$, т.е. $F(x) + C$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Определение 2. **Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается**

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ где}$$

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x) dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$;

C - постоянная интегрирования;

x - переменная интегрирования;

\int - знак интеграла.

Определение 3. **Действие нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется интегрированием данной функции.**

Пример. $\int 5x^4 dx = x^5 + C$; $\int 10x^9 dx = x^{10} + C$;
 $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$
 $\int e^x dx = e^x + C$

§2. Основные свойства неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$$

**1. Производная от неопределенного интеграла
равна подынтегральной функции:**

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

Доказательство:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

Замечание. На этом свойстве основывается
проверка правильности нахождения
неопределенного интеграла.

**2. Дифференциал от неопределенного
интеграла равен подынтегральному
выражению:**

$$d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$dy = y' dx$$

**3. Неопределенный интеграл от
дифференциала некоторой функции равен
самой этой функции с точностью до
постоянного слагаемого:**

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\boxed{\int A \cdot f(x) dx = A \int f(x) dx}, \quad A \neq 0$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:

$$\boxed{\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx}$$

6. Свойство *инвариантности*: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо x любой дифференцируемой функции от x .

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\boxed{\int f(u) du = F(u) + C}$. На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

Пример. Так как $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, то

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\int (e^x)^2 d(e^x) = \frac{(e^x)^3}{3} + C$$

$$\int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C \quad \text{и т.д.}$$

Замечание. Не путать с интегралами:

$$\int \sin^2 x dx \quad ; \quad \int (e^x)^2 dx \quad ; \quad \int (\ln x)^2 \cdot dx$$

§3. Таблица основных интегралов.

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$4. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$5. \int e^u du = e^u + C$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$7. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$8. \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$9. \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$$

$$10. \int \sec^2 u du = \operatorname{tgu} + C$$

$$11. \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctgu} + C$$

$$12. \int \sec u du = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$13. \int \operatorname{cosec} u du = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$14. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

$$15. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$17. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C$$

$$18. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

Замечания: 1) Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C$$

$$(\ln |\sin u| + C)' = \frac{(\sin u)'}{\sin u} = \frac{\cos u}{\sin u} = \operatorname{ctg} u$$

2) Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

Пример. Найти интегралы по таблице:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 - 100} = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{x-10}{x+10} \right| + C \quad - (15)$$

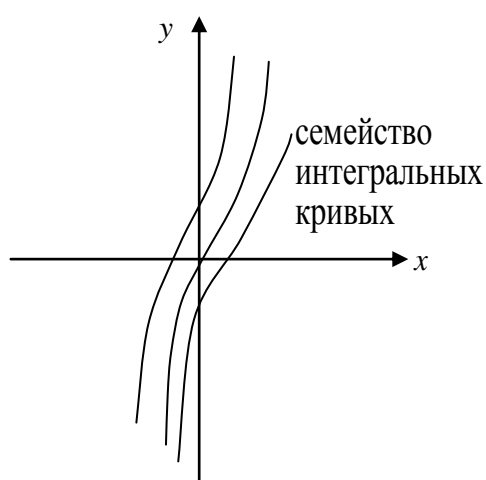
$$2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 81}} = \frac{1}{9} \operatorname{arcsec} \frac{x}{9} + C \quad - (17)$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C \quad - (16)$$

§4. Геометрический смысл неопределенного интеграла.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых вида $y = F(x) + C$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$. Интегральные кривые получаются друг из друга, путем параллельного переноса вдоль оси ОУ.

Пример.



$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$f(x) = 3x^2 \quad ; \quad F(x) = x^3$$

$$\boxed{y = x^3 + C}, \text{ если}$$

$$c = 0 \quad y = x^3$$

$$c = 1 \quad y = x^3 + 1$$

$$c = -1 \quad y = x^3 - 1 \quad \text{и т.д.}$$

Правило: чтобы из семейства интегральных кривых $y = F(x) + C$ выделить одну определенную кривую, нужно задать некоторые дополнительные условия для того, чтобы данная кривая, например, проходила через некоторую точку $M(x_0; y_0)$. Эти условия называются **начальными**, т.е. при $x = x_0$; $y = y_0$.

С помощью этих условий можно найти постоянную величину C :

$$y_0 = F(x_0) + C \Rightarrow C = y_0 - F(x_0)$$

Пример. Выделить из предыдущего семейства кривую, проходящую через точку $A(-1; 3)$.

$y = x^3 + C$. Подставим в это уравнение координаты точки A .

$$3 = (-1)^3 + C$$

$$C = 3 + 1$$

$$C = 4$$

\Rightarrow

$$\underline{y = x^3 + 4}$$

§5. Методы непосредственного интегрирования.

1. Интегрирование по таблице.

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

Пример.

$$1) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4} \right| + C$$

2. Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

Пример.

$$1) \int (3x^3 + 5x^2 - x + 2) dx = \int 3x^3 dx + \int 5x^2 dx - \int x dx + \int 2 dx =$$

$$= 3 \frac{x^4}{4} + 5 \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$2) = \int dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx = x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

3. Непосредственное интегрирование.

3.1. Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{если } u = \varphi(x), \quad \text{то}$$

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

Пример.

1)

$$\int \cos x \cdot \sin x \cdot dx = \int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \quad \text{т.к. } \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$2) \int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x dx = \int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

$$(dy = y' dx)$$

$$3) \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \int \frac{d(\ln x)}{1 + \ln^2 x} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$$

3.2. Добавление постоянного слагаемого под знак дифференциала.

При любой постоянной **a** будет выполняться равенство:

$d(x+a) = dx$. Значит, и наоборот

$dx = d(x+a)$ и поэтому

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(x) d(x+a)},$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любое постоянное слагаемое.

Пример.

$$1) \int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|x+5| + C$$

3.3. Введение под дифференциал постоянного множителя.

$$\boxed{\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax)},$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

Пример.

$$1) \int \sin 7x dx = \frac{1}{7} \int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7} \cos 7x + C$$

3.4. Интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя.

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C}$$

Пример.

$$1) \int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx = \ln|x^2+3x+7| + C$$

§6. Метод подстановки.

Пусть $\int f(x) dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array}}, \text{ т.е.}$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной x .

Пример.

$$\begin{array}{l} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} = \int \frac{2tdt}{t+1} = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \left(\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = \\ \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = 2t - 2 \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2 \ln|\sqrt{x+1}+1| + C \end{array}$$

§7. Интегрирование по частям.

Метод интегрирования по частям вызван тем, что нет формулы, позволяющей находить интеграл от произведения функции.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int d(u \cdot v) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

$$uv = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

$$\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du} \text{ - формула}$$

интегрирования по частям

Сущность метода: подынтегральное выражение

$f(x)dx$ представляют в виде произведения 2-х множителей **u** и **dv**, затем пользуются правой частью формулы.

Как правильно выбрать **u** и **dv**:

Вид интеграла	u	dv
I	$\int p(x) \cdot \ln x dx$	$\ln x$ $p(x)dx$
	$\int p(x) \cdot \arcsin x dx$	$\arcsin x$ $p(x)dx$
	$\int p(x) \cdot \arctg x dx$	$\arctg x$ $p(x)dx$

II	$\int p(x) \sin ax \cdot dx$	$p(x)$	$\sin ax \cdot dx$
	$\int p(x) \cos bx \cdot dx$	$p(x)$	$\cos bx \cdot dx$
	$\int p(x) \cdot e^{\alpha x} dx$	$p(x)$	$e^{\alpha x} dx$
III	$\int e^{\alpha x} \cdot \sin ax \cdot dx \rightleftarrows$	$e^{\alpha x} \rightleftarrows$ $\sin ax$	$\sin ax dx$ $e^{\alpha x} dx$
	$\int e^{\alpha x} \cdot \cos bx \cdot dx \rightleftarrows$	$e^{\alpha x} \rightleftarrows$ $\cos bx$	$\cos bx dx$ $e^{\alpha x} dx$
	$\int \sin(\ln x) dx$	$\sin(\ln x)$	dx

$P(x)$ - многочлен или одночлен.

Замечание:

Интегралы III группы берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Пример.

1)

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} \ln x = u & \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv & x = v \end{array} \right| =$$
$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx =$$

$$= \underline{x \cdot \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C}$$

2)

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} x^2 = u & \cos x dx = dv \\ 2x dx = du & \sin x = v \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx =$$

$$= x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = u & \sin x dx = dv \\ dx = du & v = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - 2 \left(-x \cdot \cos x - \int (-\cos x) dx \right) =$$

$$= x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + C$$

3)

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} e^x = u & \sin x dx = dv \\ e^x dx = du & -\cos x = v \end{array} \right| = -e^x \cos x - \int (-\cos x) \cdot e^x dx =$$

$$= -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} e^x = u & \cos x dx = dv \\ e^x dx = du & \sin x = v \end{array} \right| =$$

$$-e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx;$$

$$2 \int e^x \cdot \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$